

GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תוכן

3.....	פרק 1 - גבולות
3	הסבר כללי
3	חישוב גבול של פונקציה בשיטת ההצבה
3	חישוב גבול של פונקציה בשיטת הצמצום
4	חישוב גבול של פונקציה בשיטת כפל בצמוד
5	חישוב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף
7	חישוב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף
8	חישוב הגבול של אוילר
9	חישוב גבול של פונקציה לפי הגדרה
10.....	פרק 2 - חישוב נגזרת של פונקציה
10.....	כללי הגזירה
10.....	נגזרת של פונקציה רציונלית
11.....	נגזרת של פונקציה מעריכית
13.....	נגזרת של פונקציה לוגריתמית
16.....	נגזרת של פונקציה x בחזקת פונקציה של x
17.....	נגזרת לפי הגדרה
18.....	פרק 3 - כלל לופיטל
21.....	פרק 4 - חקירת פונקציה
21.....	שלבי חקירת פונקציה
21.....	חקירת פולינום
22.....	חקירת פונקציה רציונלית
25.....	חקירת פונקציה מעריכית
27.....	חקירת פונקציה לוגריתמית
29.....	חקירת פונקציה עם שורשים
31.....	קיצון מוחלט
32.....	פרק 5 - שימושי הנגזרת
32.....	נוסחת הקירוב הלינארי
32.....	גמישות הביקוש
33.....	בעיות קיצון כלכליות
36.....	בעיות קיצון מסוגים שונים
38.....	פרק 6 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים
40.....	פרק 7 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)
43.....	פרק 8 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')
47.....	פרק 9 - אינטגרלים
49.....	פרק 10 - האינטגרל המסוים ושימושו
57.....	פרק 11 - גזירת האינטגרל

פרק 1 - גבולות

הסבר כללי

- בסרטון זה הסבר כללי על חישוב גבול של פונקציה.

חישוב גבול של פונקציה בשיטת ההצבה

- בסרטון זה תוסבר טכניקת הצבה לחישוב גבול של פונקציה.

חישוב גבול של פונקציה בשיטת הצמצום

- בסרטון זה תוסבר טכניקת צמצום לחישוב גבול של פונקציה.

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - x} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad .8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad .10$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x - 21}{-x^2 + 2x + 3} \quad .9$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad .12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad .11$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad .14$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad .13$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad .15$$

פתרונות

$$(13) \frac{8}{17} \quad (12) 32 \quad (11) 3 \quad (10) -\frac{13}{4} \quad (9) \frac{10}{8.5} \quad (8) \frac{2}{3} \quad (7) 7 \quad (6) \frac{5}{6} \quad (5) \frac{1}{2} \quad (4) -1.5 \quad (3) \frac{1}{2} \quad (2) -1 \quad (1) n-1 \quad (15) 6 \quad (14) 27$$

חישוב גבול של פונקציה בשיטת כפל בצמוד

- בסרטון זה תוסבר טכניקת כפל בצמוד לחישוב גבול של פונקציה

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{2x-6} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+3}}{x^2-x} \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad .8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad .10$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad .9$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad .11$$

פתרונות

$$\frac{1}{3} \quad (11) \quad -\frac{13}{4} \quad (10) \quad \frac{3}{4} \quad (9) \quad \frac{1}{6} \quad (8) \quad \frac{3}{8} \quad (7) \quad \frac{2}{3} \quad (6) \quad 1 \quad (5) \quad -\frac{1}{12} \quad (4) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad 4 \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

חישוב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף

חשב את הגבולות הבאים:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$.2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$.1
$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x$.4	$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x$.3
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x$.6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x$.5
$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^{\frac{1}{x}}$.8	$\lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{1}{x}}$.7
$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x}$.10	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3}$.9
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x}$.12	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}$.11
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2}\right)$.14	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x}$.13
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - 1}{x^5 - 1}$.16	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2}{5x^4 + x^3}$.15
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{5x^4 - 5x^3 + x}$.18	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2}$.17
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.20	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^3 - x^6}{1 - 5x^2 + 3x^6}$.19
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1}$.22	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.21
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 2}$.24	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}}$.23
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x} + x}{3x - 1}$.26	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}$.25
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}}$.28	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}}$.27

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad .30$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad .29$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^x - 2^x}{2(2^x + 5^x)} \quad .32$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 7^x}{-2^x + 7^{x-1}} \quad .31$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad .34$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 5^x - 2^x}{2(2^x + 5^x)} \quad .33$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad .36$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad .35$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad .38$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad .37$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad .40$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad .39$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad .42$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad .41$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x) \quad .44$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad .43$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x) \quad .46$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} - x \quad .45$$

פתרונות

- 0 (13) $-\infty$ (12) 4 (11) 0 (10) 0 (9) 1 (8) 1 (7) ∞ (6) 0 (5) 0 (4) ∞ (3) 0 (2) 0 (1)
 -2 (24) $\frac{3}{2}$ (23) -3 (22) -1 (21) 1 (20) $-\frac{1}{3}$ (19) $\frac{2}{5}$ (18) $\frac{1}{2}$ (17) 0 (16) 0 (15) -5 (14)
 4 (34) $-\frac{1}{2}$ (33) 1 (32) -10 (31) $\frac{1}{9}$ (30) 4 (29) 0 (28) $\frac{1}{4}$ (27) $-\frac{1}{3}$ (26) $\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (25)
 $\frac{1}{2}$ (42) $-\frac{1}{2}$ (41) $\frac{1}{2}$ (40) $\frac{k}{2}$ (39) 2.5 (38) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}, \sqrt[5]{\frac{a}{b}}, 0, \infty, -\infty$ (37) $\frac{1}{3}$ (36) $\ln 3$ (35)
 $-\frac{1}{4}$ (46) ∞ (45) 1 (44) $\frac{a-b}{2}$ (43)

חישוב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 19876^{\frac{1}{x}} \quad .2 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} 7^{\frac{1}{x}} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad .4 \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+4}{x} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad .6 \qquad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad .8 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad .10 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3 \right) \quad .9$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad .12 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad .11$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad .13$$

$$.14 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + x + k}{x^2 - 4} = \text{נתון: מספר סופי}$$

חשב את k ואת ערך הגבול.

פתרונות

- (1 ∞ (2 0 (3 ∞ (4 ∞ (5 ∞ (6 לא קיים גבול (7 ∞ (8 ∞ (9 ∞ (10 לא קיים גבול (11 $\frac{11}{4}$, $k = -10$ (12 1 (13 לא קיים גבול (14 $\frac{11}{4}$)

חישוב הגבול של אוילר

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול לפי נוסחת אוילר

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4}\right)^{4x^2} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad .8$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+2}\right)^{10x} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad .9$$

פתרונות

$$e \quad (9) \quad e \quad (8) \quad e^{30} \quad (7) \quad e^{-12} \quad (6) \quad e^3 \quad (5) \quad \frac{1}{e} \quad (4) \quad e^2 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad \sqrt{e} \quad (1)$$

חישוב גבול של פונקציה לפי הגדרה

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול לפי הגדרה

1. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14$.

2. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$.

3. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1$.

4. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1}$.

5. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x}$.

6. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x$.

7. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

8. הוכח על פי הגדרת הגבול כי $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$.

פתרונות

$$\delta = \min\{1, 10\varepsilon\} \quad (4) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\} \quad (3) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\} \quad (2) \quad \delta = \frac{\varepsilon}{7} \quad (1)$$

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\} \quad (5) \quad \delta = \varepsilon \quad (6) \quad \delta = \frac{1}{M}, \quad \frac{1}{x^2-1} < M \quad (7)$$

פרק 2 - חישוב נגזרת של פונקציה

כללי הגזירה

1. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של פונקצית חזקה.
2. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של קבוע כפול פונקציה.
3. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של קבוע.
4. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של סכום והפרש.
5. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של פונקצית חזקה מורכבת.
6. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של $\frac{1}{x}$.
7. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של מכפלה.
8. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של מנה.
9. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של \sqrt{x} .
10. בסרטון זה הסבר על הנגזרת של פונקציה עם פרמטר.

נגזרת של פונקציה רציונלית

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של מנה

גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 f'(x) = \left(\frac{2x^2}{(x+1)^2} \right)' & \text{3.} & f'(x) = \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \right)' & \text{2.} & f'(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \right)' & \text{1.} \\
 f'(x) = \left(\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3 \right)' & \text{6.} & f'(x) = \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} \right)' & \text{5.} & f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} \right)' & \text{4.}
 \end{array}$$

פתרונות

$$\text{(1) } \frac{4}{x^3} \quad \text{(2) } \frac{448}{(2x+10)^3} \quad \text{(3) } \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad \text{(4) } \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad \text{(5) } \frac{6x}{(x+1)^4} \quad \text{(6) } \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^3} \cdot 12$$

נגזרת של פונקציה מעריכית

• בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של פונקציה מעריכית

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1$ ב. $f(x) = e^{x^2-3x} + ex$

ג. $f(x) = e^{\sin x}$ ד. $f(x) = 2^{3x}$

ה. $f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x \cdot e^x$ ב. $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$

ג. $f(x) = (x+1) \cdot 2^x$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ ב. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3$ ב. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$

5. גזור את הפונקציה $f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^4$.

6. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = \left((x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)^4$

ב. $f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right)\right)^4$

7. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = \left(x \cdot e^{-2x^2}\right)^4$

ב. $f'(x) = \left(e^{-2x^2} (1 - 4x^2)\right)^4$

פתרונות

(1) א. $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$.ב. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$.ג. $\cos x \cdot e^{\sin x}$.ד. $3\ln 2 \cdot 2^{3x}$

ה. $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$.א. (2) $e^x(1+x)$.ב. $2x \cdot e^{4x}(1+2x)$.א. (3) $\frac{x(2-x)}{e^x}$

ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.א. (4) $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$.ב. $\frac{(e^{2x}-e^{-2x})}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$.א. (5) $e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4} \right)$

א. (6) $e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2-x-2}{x^2} \right)$.ב. $e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4} \right)$.א. (7) $e^{-2x^2}(1-4x^2)$.ב. $-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

נגזרת של פונקציה לוגריתמית

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של פונקציה לוגריתמית

1. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \ln(x^2 - 3x) \quad \text{ב.} \quad f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1) \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \ln(e^x + 1) \quad \text{ד.} \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \log_2(x) + 5 \log_3(2x-1) \quad \text{ו.} \quad f(x) = \ln(\cos x) \quad \text{ה.}$$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = (3x+1)^2 \cdot \ln x \quad \text{ב.} \quad f(x) = x \ln x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \sqrt{\ln x + x} \quad \text{ה.}$$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 3 \ln^2 x \quad \text{ב.} \quad f(x) = \ln^3 x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2} \quad \text{ד.} \quad f(x) = x^2 \ln^2 x \quad \text{ג.}$$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \quad \text{א.}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' \quad \text{ב.}$$

5. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' \quad \text{א.}$$

$$f'(x) = \left(\frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}\right)' \quad \text{ב.}$$

6. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = (x \cdot \ln x)^1$

ב. $f'(x) = (\ln x + 1)^1$

7. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = (x^2 \ln x)^1$

ב. $f'(x) = (x \cdot (2 \ln x + 1))^1$

8. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (x < 2)$

ב. $f'(x) = \left(-\frac{1}{2} \ln(2-x)\right)^1$

ג. $f'(x) = \left(\frac{1}{4-2x}\right)^1$

9. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = \left((\ln x)^2 + 2 \ln x - 32\right)^1$

ב. $f'(x) = \left(\frac{2 \ln x + 2}{x}\right)^1$

10. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f'(x) = \left((\ln x)^2 + (\ln x)^{-2}\right)^1$

ב. $f'(x) = \left(\frac{2}{x} \left[\ln x - (\ln x)^{-3} \right]\right)^1$

פתרונות

$$\frac{e^x}{e^x+1} \quad \cdot \quad \frac{-2}{(x+1)(x-1)} \quad \cdot \quad \frac{2x-3}{x^2-3x} \quad \cdot \quad \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \quad \cdot \quad \text{א. (1)}$$

$$\frac{1-\ln x}{x^2} \quad \cdot \quad (3x+1) \left(6\ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \quad \cdot \quad \ln x + 1 \quad \cdot \quad \text{א. (2)} \quad \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3} \quad \cdot \quad -\tan x \quad \cdot \quad \text{ה.}$$

$$\frac{3\ln^2 x}{x} \quad \cdot \quad \text{א. (3)} \quad \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}} \quad \cdot \quad \text{ה.} \quad \frac{4}{x(\ln x+2)^2}$$

$$\frac{2\ln x-3}{x^3} \quad \cdot \quad \frac{1-\ln x}{x^2} \quad \cdot \quad \text{א. (4)} \quad \frac{2(\ln x-1)}{x(\ln x+1)^3} \quad \cdot \quad 2x \ln x (\ln x+1) \quad \cdot \quad \frac{6\ln x}{x} \quad \cdot \quad \text{ב.}$$

$$2\ln x+3 \quad \cdot \quad x \cdot (2\ln x+1) \quad \cdot \quad \text{א. (7)} \quad \frac{1}{x} \quad \cdot \quad \ln x+1 \quad \cdot \quad \text{א. (6)} \quad \frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}} \quad \cdot \quad \frac{2-\ln x}{2x^{1.5}} \quad \cdot \quad \text{א. (5)}$$

$$\frac{-2\ln x}{x^2} \quad \cdot \quad \frac{2}{x} (\ln x+1) \quad \cdot \quad \text{א. (9)} \quad \frac{2}{(4-2x)^2} \quad \cdot \quad \frac{1}{2(2-x)} \quad \cdot \quad -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad \cdot \quad \text{א. (8)}$$

$$-\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad \cdot \quad \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right] \quad \cdot \quad \text{א. (10)}$$

נגזרת של פונקציה של x בחזקת פונקציה של x

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של x בחזקת פונקציה של x

גזור את הפונקציות הבאות:

$$y = x^{\frac{x}{2}} \quad .2$$

$$y = x^{x^2} \quad .1$$

$$y = (\ln x)^{4x} \quad .4$$

$$y = (x+1)e^x \quad .3$$

$$y = (x+1-k)^{\sqrt{x}} \quad .6$$

$$y = x^{ax} \quad .5$$

פתרונות

$$y' = e^x (x+1)^{e^x} \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right] \quad (3) \quad y' = \frac{1}{2} x^{\frac{x}{2}} [\ln x + 1] \quad (2) \quad y' = x^{x^2} [2x \cdot \ln x + x] \quad (1)$$

$$y' = ax^{ax} [\ln x + 1] \quad (5) \quad y' = 4(\ln x)^{4x} \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right] \quad (4)$$

$$y' = (x+1-k)^{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x+1-k) + \frac{1}{x+1-k} \cdot \sqrt{x} \right] \quad (6)$$

נגזרת לפי הגדרה

1. חשב על פי הגדרת הנגזרת, את נגזרת הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 + 4x + 1$.

2. חשב על פי הגדרת הנגזרת את הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

3. חשב על פי הגדרת הנגזרת את הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{x+10}$.

4. מצא את הנגזרת של הפונקציה הבאה, לפי נוסחת הגדרת הנגזרת: $y = 2x^2 - 3$.

5. מצא את הנגזרת של הפונקציה הבאה, לפי נוסחת הגדרת הנגזרת: $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 1.5$.

6. חשב על פי הגדרת הנגזרת את הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln x$.

7. חשב על פי הגדרת הנגזרת את הפונקציה הבאה: $f(x) = e^x$.

פתרונות

$$e^x \quad (7) \quad \frac{1}{x} \quad (6) \quad 2x + \frac{1}{2} \quad (5) \quad 4x \quad (4) \quad \frac{1}{2\sqrt{x+10}} \quad (3) \quad -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (2) \quad 2x + 4 \quad (1)$$

פרק 3 - כלל לופיטל

(1) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x-2} - 1} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x-1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax^2)}{bx^2} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(x^2 - 4x)} \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x^2)}{x^4} \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh x - 2}{1 - \cos 2x} \quad (29)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sinh x} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (33)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (32)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (35)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \quad (34)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \cdot \ln x \quad (39)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (38)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (37)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3) \quad (42)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (41)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cot x \quad (40)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad (45)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right] \quad (44)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (43)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x \quad (48)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(3x) - \ln(\sin 5x)] \quad (47)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (46)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad (51)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (50)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \quad (49)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad (54)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \quad (53)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 4)^{x-2} \quad (52)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \quad (57)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (56)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan 3x)^{\frac{1}{x}} \quad (55)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\cot x} \quad (60)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \quad (59)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \quad (58)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (63)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\cot^2 x} \quad (62)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x)^{\tan x} \quad (61)$$

(2) כל אחד מהגבולות הבאים הוא מן הסוג $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. הראה זאת והסבר מדוע למרות כך, כלל לופיטל אינו ישים, לבסוף חשב את הגבול.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (1)$$

פתרונות:

(1)

$$\frac{5}{6} \quad (7) \quad \frac{3}{2} \quad (6) \quad \frac{1}{6} \quad (5) \quad 4 \quad (4) \quad n-1 \quad (3) \quad \frac{20}{17} \quad (2) \quad \frac{5}{6} \quad (1)$$

$$2 \quad (14) \quad -\frac{1}{2} \quad (13) \quad \frac{1}{6} \quad (12) \quad \frac{1}{2} \quad (11) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad (10) \quad 1 \quad (9) \quad -\frac{3}{2} \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \quad (21) \quad \frac{1}{2} \quad (20) \quad \frac{1}{6} \quad (19) \quad \frac{a}{b} \quad (18) \quad \frac{a}{b} \quad (17) \quad 1 \quad (16) \quad 1 \quad (15)$$

$$1 \quad (28) \quad 1 \quad (27) \quad -\frac{3}{4} \quad (26) \quad -\frac{1}{2} \quad (25) \quad -\frac{1}{3} \quad (24) \quad \frac{1}{3} \quad (23) \quad \frac{1}{8} \quad (22)$$

$$0 \quad (35) \quad \infty \quad (34) \quad 0 \quad (33) \quad \infty \quad (32) \quad \frac{1}{2} \quad (31) \quad \frac{1}{2} \quad (30) \quad \frac{2}{3} \quad (29)$$

$$0 \quad (42) \quad 0 \quad (41) \quad 0 \quad (40) \quad 0 \quad (39) \quad 0 \quad (38) \quad 0 \quad (37) \quad 1 \quad (36)$$

$$\frac{1}{2} \quad (49) \quad \ln \frac{3}{5} \quad (48) \quad 0.5 \quad (47) \quad 0 \quad (46) \quad 2.5 \quad (45) \quad 6 \quad (44) \quad 0 \quad (43)$$

$$1 \quad (56) \quad e^2 \quad (55) \quad 1 \quad (54) \quad 1 \quad (53) \quad 1 \quad (52) \quad e \quad (51) \quad -\frac{1}{2} \quad (50)$$

$$1 \quad (63) \quad e \quad (62) \quad 1 \quad (61) \quad 1 \quad (60) \quad e^{-1/2} \quad (59) \quad e^{1/3} \quad (58) \quad e^3 \quad (57)$$

$$e^{-1/6} \quad (65) \quad e \quad (64)$$

(2)

$$0.75 \quad (3) \quad 0.25 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

פרק 4 - חקירת פונקציה

שלבי חקירת פונקציה

1. בסרטון זה הסבר על נקודות קיצון.
2. בסרטון זה המשך ההסבר על נקודות קיצון.
3. בסרטון זה הסבר על נקודות פיתול.
4. בסרטון זה המשך ההסבר על נקודות פיתול.
5. בסרטון זה הסבר על אסימפטוטה אנכית.
6. בסרטון זה הסבר על אסימפטוטה משופעת.

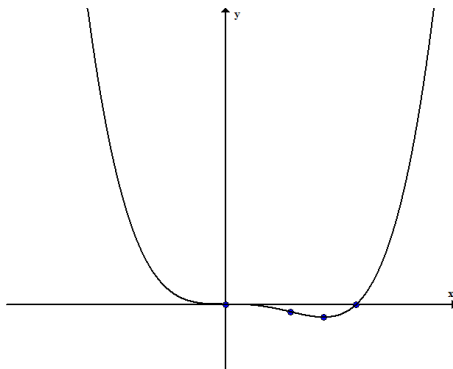
חקירת פולינום

1. חקור את הפונקציה $f(x) = x(x-9)^2$.
2. חקור את הפונקציה $f(x) = x^4 - 2x^3$.

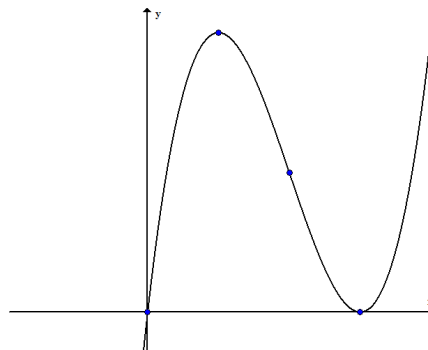
פתרונות

- (1) תחום הגדרה: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(9,0)$, נקודות קיצון: $max(3,108)$, $min(9,0)$, תחומי עליה: $x < 3$ או $x > 9$, תחום ירידה: $3 < x < 9$, נקודת פיתול: $(6,54)$, תחום קמירות: $x > 6$, תחום קעירות: $x < 6$. (2) תחום הגדרה: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(2,0)$, נקודות קיצון: $min\left(1.5, -\frac{27}{16}\right)$, תחום עליה: $x > 1.5$, תחום ירידה: $x < 1.5$, נקודות פיתול: $(1,-1)$, $(0,0)$, תחומי קמירות: $x > 1$ או $x < 0$, תחום קעירות: $0 < x < 1$.

(2)



(1)



חקירת פונקציה רציונלית

1. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$.

3. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.

5. חקור את הפונקציה $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$.

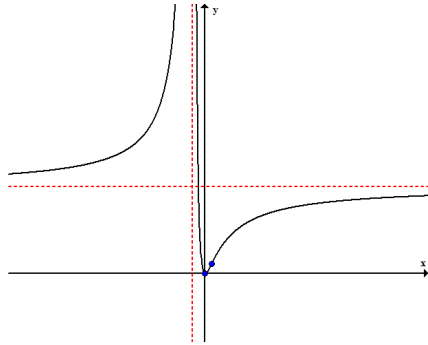
6. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1}$.

פתרונות

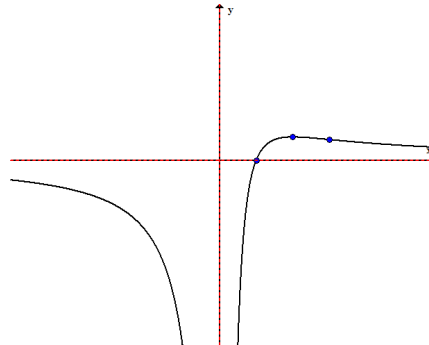
1 תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אסימפטוטות: $x=0$, $y=0$, נקודת קיצון: $\max(2, 0.25)$, תחום עליה: $0 < x < 2$, תחום ירידה: $x < 0$ או $x > 2$, נקודת פיתול: $\left(3, \frac{2}{9}\right)$, תחום קמירות: $x > 3$, תחום קעירות: $x < 0$ או $0 < x < 3$. **2** תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq -1$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x=-1$, $y=2$, נקודת קיצון: $\min(0,0)$, תחום עליה: $x < -1$ או $x > 0$, תחום ירידה: $-1 < x < 0$, נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$, תחום קמירות: $x < -1$ או $-1 < x < \frac{1}{2}$, תחום קעירות: $x > \frac{1}{2}$. **3** תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq \pm 2$, זוגיות: אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x = \pm 2$, $y = x$, נקודת קיצון: $\max(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, $\min(\sqrt{12}, \sqrt{27})$, תחום עליה: $x < -\sqrt{12}$ או $x > \sqrt{12}$, תחום ירידה: $-\sqrt{12} < x \neq \pm 2 < \sqrt{12}$, נקודת פיתול: $(0,0)$, תחום קמירות: $-2 < x < 0$ או $x > 2$, תחום קעירות: $x < -2$ או $0 < x < 2$.

4 תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq -1$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x=-1$, $y=x-2$, נקודת קיצון: $\max\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$, תחום עליה: $x < -3$ או $x > -1$, תחום ירידה: $-3 < x < -1$, נקודת פיתול: $(0,0)$, תחום קמירות: $x > 0$, תחום קעירות: $x < -1$ או $-1 < x < 0$. **5** תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 1$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(-1,0)$, $(0,-1)$, אסימפטוטות: $x=1$, $y=1$, אין נקודות קיצון, תחום ירידה: כל x , נקודת פיתול: $(-1,0)$, $\left(-3, \frac{1}{8}\right)$, תחום קמירות: $-3 < x < -1$ ו- $x > 1$, תחום קעירות: $x < -3$ או $-1 < x < 1$. **6** תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq \pm 1$, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x=-1$, חור בנקודה $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, נקודת קיצון: $\max(-2, -4)$, $\min(0,0)$, תחום עליה: $x < -2$ או $0 < x < 1$ או $x > 1$, תחום ירידה: $-2 < x < -1$ או $-1 < x < 0$, אין נקודות פיתול, תחום קמירות: $-1 < x < 1$ או $x > 1$, תחום קעירות: $x < -1$.

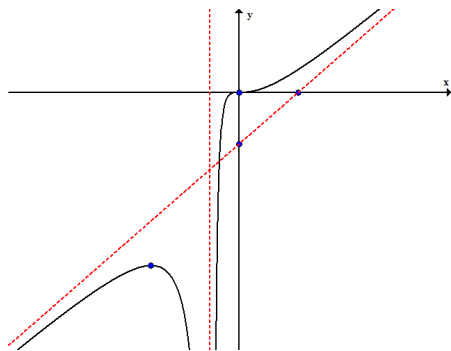
(2)



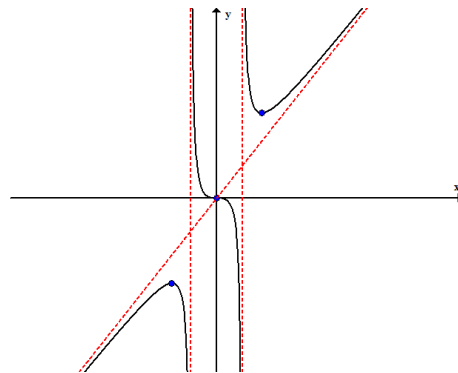
(1)



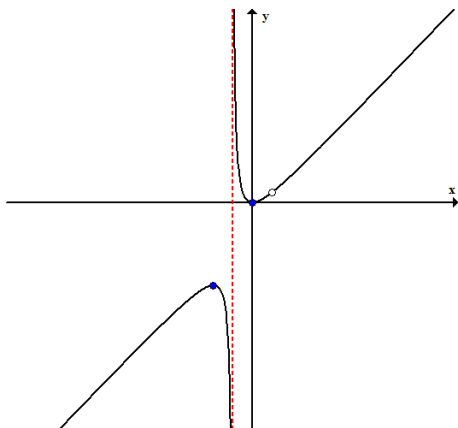
(4)



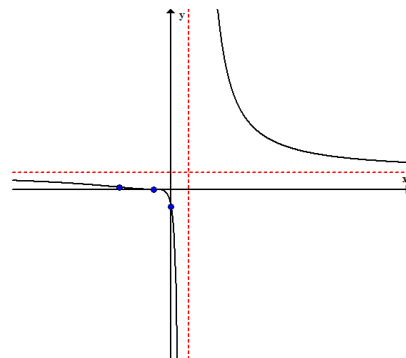
(3)



(6)



(5)



חקירת פונקציה מעריכית

1. חקור את הפונקציה $f(x) = x - e^x$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

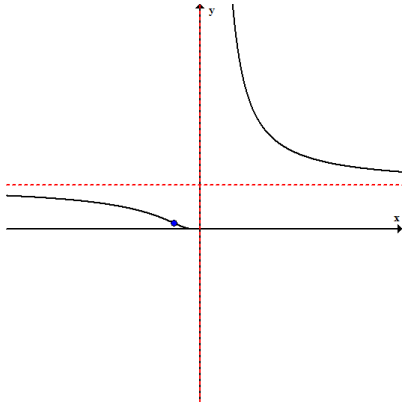
3. חקור את הפונקציה $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = xe^{-2x^2}$.

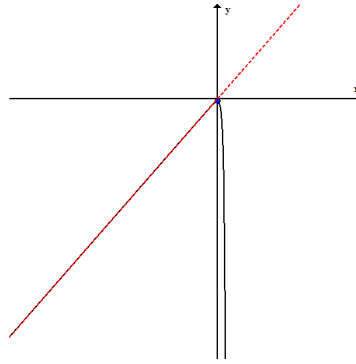
פתרונות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0, -1)$, אסימפטוטות: $y = x$, נקודת קיצון: $\max(0, -1)$, תחום עליה: $x < 0$, תחום ירידה: $x > 0$, אין נקודות פיתול, תחום קעירות: כל x .
- (2) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: אין, אסימפטוטות: $x = 0$, $y = 1$, נקודת קיצון: אין, תחום ירידה: כל x , נקודת פיתול: $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$, תחום קמירות: $-0.5 < x < 0$ או $x > 0$.
- תחום קעירות: $x < -0.5$. (3) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(-2, 0)$, אסימפטוטות: $x = 0$, $y = x + 3$, נקודת קיצון: $\min(2, 4e^{1/2}), \max(-1, e^{-1})$, תחום עליה: $x < -1$ או $x > 2$, תחום ירידה: $-1 < x < 0$ או $0 < x < 2$, נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$, תחום קמירות: $-0.4 < x < 0$ או $x > 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
- (4) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0, 0)$, אסימפטוטות: $y = 0$, נקודת קיצון: $\min\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right), \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$, תחום עליה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, תחום ירידה: $x < -\frac{1}{2}$ או $x > \frac{1}{2}$, נקודת פיתול: $(\sqrt{3/4}, \sqrt{3/4}e^{-3/2}), (-\sqrt{3/4}, -\sqrt{3/4}e^{-3/2}), (0, 0)$, תחום קמירות: $-\sqrt{3/4} < x < 0$ או $x > \sqrt{3/4}$, תחום קעירות: $0 < x < \sqrt{3/4}$ או $x < -\sqrt{3/4}$.

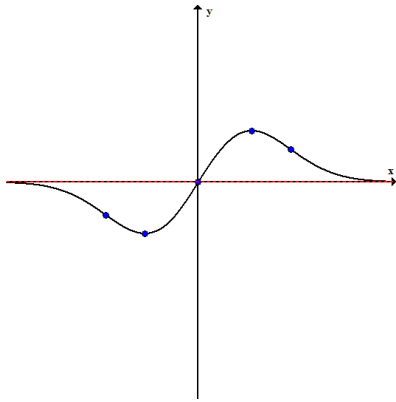
(2)



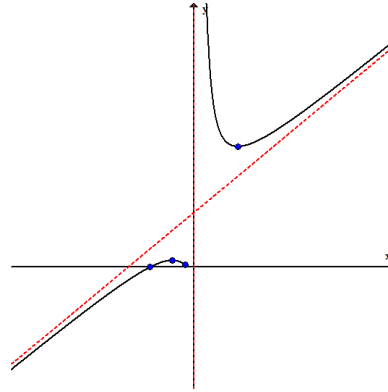
(1)



(4)



(3)



חקירת פונקציה לוגריתמית

1. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

3. חקור את הפונקציה $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = x \ln x$.

5. חקור את הפונקציה $f(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3$.

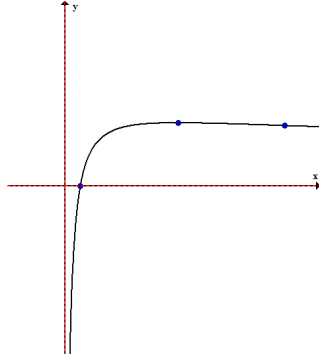
6. חקור את הפונקציה $f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3$.

פתרונות

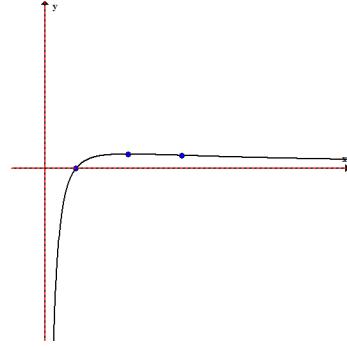
(1) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אסימפטוטות: $x=0$, $y=0$, נקודת קיצון: $\max(e, 1/e)$, תחום עליה: $0 < x < e$, תחום ירידה: $x > e$, נקודת פיתול: $(e^{3/2}, (3/2)/e^{3/2})$, תחום קעירות: $0 < x < e^{3/2}$, תחום קמירות: $x > e^{3/2}$ (2) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אסימפטוטות: $x=0$, $y=0$, נקודת קיצון: $\max(e^2, 2/e)$, תחום עליה: $0 < x < e^2$, תחום ירידה: $x > e^2$, נקודת פיתול: $(e^{8/3}, \frac{8/3}{\sqrt{e^{8/3}}})$, תחום קמירות: $0 < x < e^{8/3}$, תחום קעירות: $x > e^{8/3}$ (3) תחום הגדרה ורציפות: כל $x < 2$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, $(0, -\frac{1}{2} \ln 2)$, אסימפטוטות: $x=2$, אין נקודות קיצון, תחום עליה: כל x , אין נקודות פיתול. (4) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אסימפטוטות: חור בנקודה $(0,0)$, נקודת קיצון: $\min(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$, תחום עליה: $x > \frac{1}{e}$, תחום ירידה: $0 < x < \frac{1}{e}$, אין נקודות פיתול, תחום קמירות: כל x . (5) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(e,0)$, $(e^{-3},0)$, אסימפטוטות: $x=0$, נקודת קיצון: $\min(e^{-1}, -4)$, תחום עליה: $x > e^{-1}$, תחום ירידה: $0 < x < e^{-1}$, נקודת פיתול: $(1,-3)$, תחום קעירות: $x > 1$, תחום קמירות: $0 < x < 1$ (6) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:

$x > e^{1/2}$: תחום עליה: $\min(e^{1/2}, -4)$: נקודת קיצון: $x = 0$: אסימפטוטות: $(e^{1.5}, 0), (e^{-0.5}, 0)$
 תחום ירידה: $0 < x < e^{1/2}$: נקודת פיתול: $(e^{3/2}, 0)$: תחום קעירות: $x > 3/2$: תחום קמירות: $0 < x < 3/2$

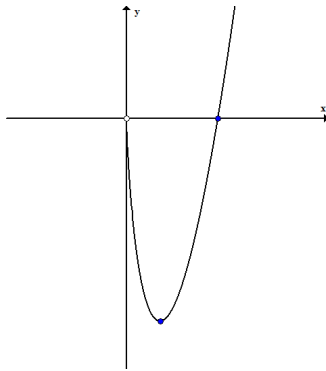
(2)



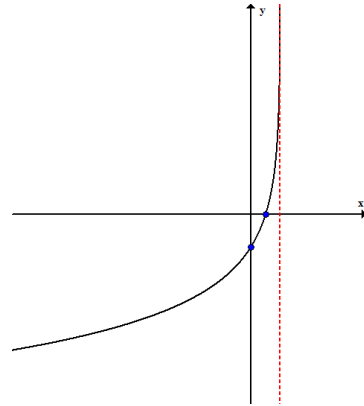
(1)



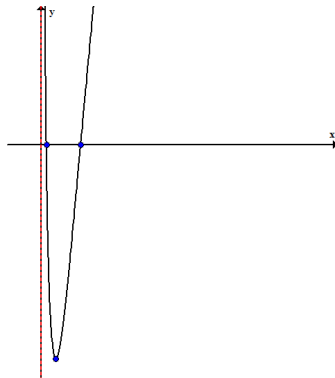
(4)



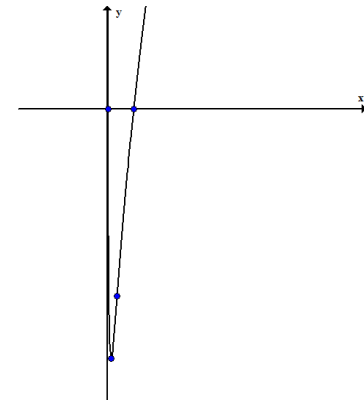
(3)



(6)



(5)



חקירת פונקציה עם שורשים

1. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x)$.

3. חקור את הפונקציה $f(x) = (\sqrt[3]{x^2} - 1)^2$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$.

פתרונות

(1) תחום הגדרה ורציפות: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,1)$, אסימפטוטות: $y = 0$, נקודת קיצון: $\max(0,1)$, תחום עליה: $x < 0$, תחום ירידה: $x > 0$, נקודת פיתול:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{1.5}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{1.5}}\right), \text{ תחום קעירות: } -\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}, \text{ תחום קמירות: } x > \sqrt{\frac{1}{2}}$$

(2) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0), (1,0)$, אין אסימפטוטות, נקודת קיצון:

$$\max(2/5, 0.326), \min(0,0), \text{ תחום עליה: } 0 < x < 2/5, \text{ תחום ירידה: } x < 0 \text{ או } x > 2/5,$$

$$\text{נקודת פיתול: } (-0.2, 0.41), \text{ תחום קמירות: } x < -0.2, \text{ תחום קעירות: } -0.2 < x < 0$$

או $x > 0$. (3) תחום הגדרה ורציפות: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,1), (-1,0), (1,0)$, אין

אסימפטוטות, נקודות קיצון: $\min(-1,0), \min(1,0), \max(0,1)$, תחום עליה: $-1 < x < 0$ או

$x > 1$, תחום ירידה: $x < -1$ או $0 < x < 1$, אין נקודות פיתול, תחום קמירות: לכל x .

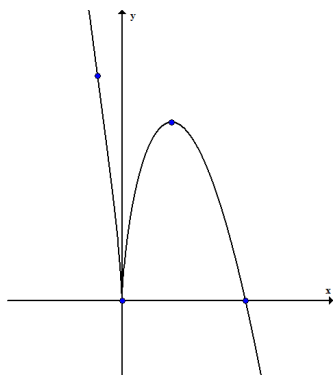
(4) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,-1), (1,0), (-1,0)$,

אין אסימפטוטות, נקודת קיצון: $\min(0,-1)$, תחום עליה: $0 < x < 1$ או $x > 1$, תחום ירידה:

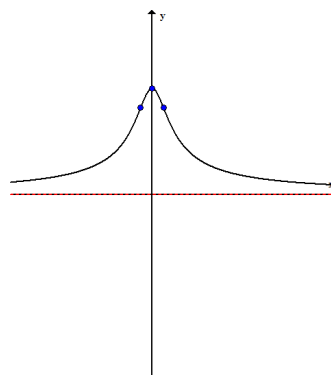
$$x < -1 \text{ או } -1 < x < 0, \text{ נקודות פיתול: } (1,0), (-1,0)$$

תחום קמירות: $-1 < x < 1$, תחום קעירות: $x < -1$ או $x > 1$.

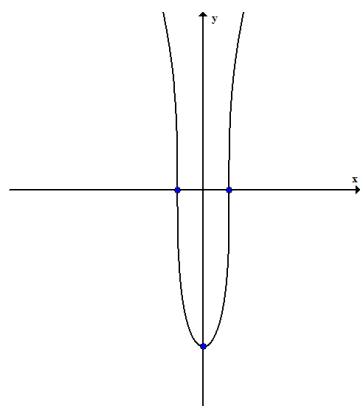
(2)



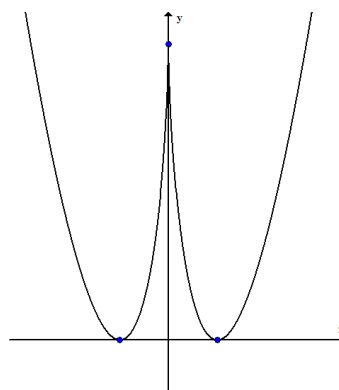
(1)



(4)



(3)



קיצון מוחלט

1. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה בתחום הרשום לידה: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ ($-1 \leq x \leq 3$).
2. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה:
לידה: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$.
3. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה בתחום הרשום לידה: $f(x) = x^{2/3}(20 - x)$ ($-1 \leq x \leq 20$).
4. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה בתחום הרשום לידה: $f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x < 1 \\ (x - 2)(x - 3) & x \geq 1 \end{cases}$ ($\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$).
5. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה בתחום הרשום לידה: $f(x) = 1 + |9 - x^2|$ ($-5 \leq x \leq 1$).
6. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה בתחום הרשום לידה: $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$ ($-5 \leq x \leq -1$).
7. מצא את נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט של הפונקציה הבאה בתחום הרשום לידה: $f(x) = x^3 - 9x + 1$ ($-\infty \leq x \leq \infty$).
8. הוכח את אי השוויון לגבי התחום הרשום בסוגריים: $x^3 e^{-7} \leq \frac{27}{3}$ (לכל x).
9. הוכח את אי השוויון לגבי התחום הרשום בסוגריים: $x e^{-\sqrt{x}} \leq 1$ ($x \geq 0$).
10. הוכח את אי השוויון לגבי התחום הרשום בסוגריים: $0 \leq x^2 e^{x-1} \leq 1$ ($x \leq 1$).

פתרונות

- (1) מקסימום מוחלט: 9, מינימום מוחלט -7 (2) מקסימום מוחלט: 3, מינימום מוחלט 0
 - (3) מקסימום מוחלט: 48, מינימום מוחלט 0 (4) מקסימום מוחלט: 2, מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$ (5)
 - (6) מקסימום מוחלט 1, מינימום מוחלט -4, לא קיים מינימום מוחלט (7)
- אין לפונקציה נקודות מקסימום ומינימום מוחלטות

פרק 5 - שימושי הנגזרת

נוסחת הקירוב הלינארי

1. בסרטון זה הסבר על נוסחת הקירוב הלינארי.
2. בסרטון זה המשך ההסבר על נוסחת הקירוב הלינארי.

גמישות הביקוש

1. חשב את גמישות הביקוש של הפונקציות הבאות:
 - א. $f(x) = x^2 + 4x$ ב. $f(x) = xe^x$ ג. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ ד. $f(x) = \ln(\ln x)$
2. פונקצית הביקוש נתונה על ידי $D(p) = 10 - p$. מצא את גמישות הביקוש, אם $p = 4$.
3. פונקצית הביקוש נתונה על ידי $D(p) = a - bp$, $a, b > 0$.
 - א. מצא את המחיר p בו $\eta_D = 0$.
 - ב. מצא את המחיר p בו $\eta_D = -1$.
4. פונקצית הביקוש נתונה ע"י $x = a \cdot \sqrt{b - p}$, כאשר x - כמות, p - מחיר, $a, b > 0$ קבועים. מצא את x ו- p עבורם גמישות הביקוש שווה ל-1.
5. הוכח כי $\eta_{\ln f} = \frac{\eta_f}{\ln f(x)}$.

פתרונות

1. א. $\frac{2x+4}{x+4}$ ב. $1+x$ ג. $\frac{2x^2}{x^2+4}$ ד. $\frac{1}{\ln x \cdot \ln(\ln x)}$ 2. $\eta_D(4) = -\frac{2}{3}$ 3. א. $p = 0$
- ב. $p = \frac{a}{2b}$ 4. $p = \frac{2b}{3}$, $x = a\sqrt{\frac{b}{3}}$

בעיות קיצון כלכליות

• בסרטון זה הסבר על פונקציות כלכליות.

1. כאשר חברת "יוטבתה" מוכרת x ליטר שוקו ליום היא יכולה לקבל מחיר של

$$p(x) = -\frac{1}{4}x + 10$$

שקל לליטר.

- מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
- מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
- מהי הכמות הנמכרת ביום אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
- שרטט את הגרף של פונקציית הביקוש ומצא את תחום ההגדרה שלה.
- פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנה את נוסחת הפונקציה כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר כפונקציה של מחירו.

2. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
- אם $x = 20$ מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
- אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?

3. פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא x .

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
- שרטט את הגרף של פונקציית הפדיון.
- מצא את פונקציית הביקוש ושרטט את הגרף שלה.

4. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$ שקל ליחידה.

- מצא את תחום הפונקציה.
- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
- מצא את פונקציית הפדיון השולי.
- לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי ומהו?

5. פונקציית הפוטנציאל הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$ האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי ומהו?

6. פונקציית הביקוש למוצר מסוים נתונה ע"י $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- מצא את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.
- מהו הביקוש במקרה זה?
- מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאת? מה משמעותו?

7. פונקצית ההוצאות של יצרן המייצר x ק"ג קפה ביום היא $C(x) = 5x + 150$.
- שרטט גרף של פונקצית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
 - מצא כמה ק"ג קפה מייצר היצרן אם ההוצאות הן 1000 ₪.
 - מהן ההוצאות אם מייצרים 20 ק"ג קפה?
 - מצא את פונקצית ההוצאה השולית.
8. פונקצית העלות של יצרן כובעים היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.
- חשב את העלות הממוצעת ליום אם הוא מייצר 40 כובעים.
 - כמה כובעים עליו לייצר כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
 - חשב את העלות השולית ליום עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק?
9. פונקצית העלות של מוצר מסויים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.
- חשב את העלות כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
 - חשב את העלות השולית כאשר $x = 100$.
 - חשב כמה תעלה יחידת מוצר נוספת כאשר היצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$ והשווה עם התוצאה של סעיף ב'. מהי המסקנה?
 - מצא האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.
10. ליצרן פונקצית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$ ופונקצית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.
- מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?
11. ליצרן פונקצית ביקוש $P(Q) = 20$ ופונקצית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.
- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?
12. ליצרן פונקצית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$ ופונקצית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.
- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו?
13. ליצרן פונקצית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$ ופונקצית עלות שולית $TC(Q) = 200 + 4Q$.
- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו? מהו המקסימום במקרה זה?
14. ליצרן פונקצית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$. מצא את פונקצית העלות אם ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$ אז העלות הכוללת היא 225 ₪.
- 15.
- הוכח שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית. הסבר את המשמעות הגרפית.
 - הוכח שאם מחיר המוצר קבוע אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית שווה למחיר המוצר.

16. $C(x)$ - פונקציית ההוצאות, $C'(x)$ - הוצאות שוליות, $\frac{C(x)}{x}$ - הוצאות ממוצעות.

- א. האם ייתכן שהוצאה שולית קבועה, למרות שהוצאה ממוצעת משתנה?
 ב. האם יתכן להפך?
 ג. הוכח, כי ההוצאה הממוצעת היא פונקציה עולה, אם ורק אם ההוצאה השולית גדולה מין ההוצאה הממוצעת.

17. מפעל המייצר מוצר מסוים משתמש בשני גורמי הייצור.
 נסמן את מחירי גורמי הייצור ליחידה ב- p_1 וב- p_2 בהתאמה.
 אם משתמשים ב- x יחידות מג"י 1 וב- y יח' מג"י 2, המפעל מייצר $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ יחידות. תקציב המפעל A ש.

- א. הוכח כי באילוץ התקציב, הייצור המקסימלי כאשר מתקיימת הנוסחה $\frac{x}{y} = \frac{p_2^2}{p_1^2}$.
 ב. חשב x ו- y עבורם יהיה הייצור מקסימלי אם נתון $p_1 = 3,000$ ש"ח, $p_2 = 100$ ש"ח, $A = 372,500$ ש"ח.

פתרונות

1. א. 9 ב. 7 ג. 16 ד. $x \geq 0$ ה. $x(p) = 40 - 4p$ (2) א. $R(x) = -0.6x^2 + 120x$, $x \geq 0$
 ב. מחיר: 108, פדיון: 2160 ג. $x = 180$ (3) א. $x \geq 0$ ג. $p(x) = -0.08x + 40$ (4) א. $x \geq 0$ ב.
 $R'(x) = -0.08x + 100$ ג. $AR(x) = -0.4x + 100$, $R(x) = -0.04x^2 + 100x$
 ד. $R_{max} = 62500$, $x = 1250$ (5) א. $R(x) = -6x^3 + 240x^2 + 1800x$
 $R'(x) = -18x^2 + 480x + 1800$ ב. לא כדאי ג. $R_{max} = 108000$, $x = 30$ (6) א. $33\frac{1}{3}$
 ב. $\frac{1000}{9}$ ג. $-3\frac{1}{3}$ (7) א. 150 ב. 170 ג. 250 ד. $MC(x) = 5$ (8) א. 21.6 ב. 100 ג. 18
 (9) א. $C(100) = 1240$, $C(101) = 1250.804$ ב. 10.8 ג. 10.804 ד. גדל (10) $Q = 800$,
 $\pi_{max} = 38200$ (11) $\pi_{max} = -250$, $Q = 5$ (12) $Q = 25$ (13) $Q = 800$, $\pi_{max} = 38200$
 (14) $TC(Q) = 0.02Q^3 + 20Q + 5$ (16) א. יתכן. ב. לא יתכן (17) ב. $x = 4$, $y = 3600$

בעיות קיצון מסוגים שונים

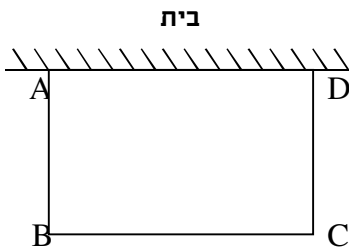
- בסרטון זה הסבר על בעיות קיצון.
- בסרטון זה הסבר על שלבי העבודה בפתרון בעיות קיצון.
- בסרטון זה הסבר על גופים תלת מימדים.

1. נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

2. מבין כל המשולשים שווי השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

3. נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלית.

4. מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.

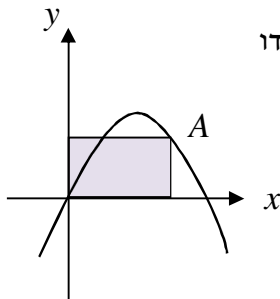


5. אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר.

מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.

מה צריכים להיות ממדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

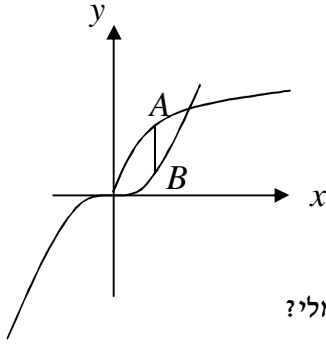
6. לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה דרושים שני חומרים להם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?



7. נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו

אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



8. נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B,

שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

9. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ והישר $y = 2x$. בין הישר והפונקציה ברביע הראשון חסמו

מלבן.

מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

10. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$. מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום

הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.

פתרונות

(1) 8, 8, 8 (2) 8 יח"א (3) 4 · 4 · 4 (4) $V = \frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח (5) 4 · 6 (6) 3 · 6 · 8 ס"מ

(7) $A(4, 8)$ (8) $A(1, 2)$ (9) $1 \cdot 2$ (10) $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

פרק 6 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים

עקומות שוות ערך, נגזרות חלקיות

עקומות שוות ערך

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

(2)

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$ באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f .

$$\text{נגדיר } f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases} \text{ . הנח כי } x, y \geq 0$$

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x, y) = 4, 12$ עבור הפונקציה הנתונה.

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$

(3)

תהי $u(x, y) = (x + p)(y + q)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ פונקצית תועלת של פרט.

הנקודות $(1, 6)$, $(3, 2)$, $(0, 14)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.

מצא את p ו- q . הצב אותם בפונקצית התועלת.

מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות? עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

נגזרות חלקיות

(4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$(only f_x) f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

(5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (3)$$

פרק 7 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4.$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפתחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$

וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבוניס, בארץ ובסין.

עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8.

מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2

למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוניס, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם

את הרווח? מהו רווח זה ?

פתרונות

- (1) $(-0.5, 1)$ אוקף ; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום ; $(-1, -2)$ מקסימום ; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוקף.
- (3) $(0, 0)$ אוקף ; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ מינימום ; $(1, 0)$ מקסימום ; $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ אוקף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום . $(4, 4)$ מקסימום.
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום . (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 3$, $z = 4$. (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך . נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1=10\$$, $P_2=12\$$, רווח מקסימלי $288\$$.

פרק 8 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')

פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת

שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ מצא את הנקודות

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית

הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$ לפרבולה

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(10) מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \quad \text{נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \quad \text{נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

$$\cdot f(x, y) = 4x + 6y \text{ תועלת}$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו-L הם

$P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף

(K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

פתרונות

$$\begin{array}{llll}
 \text{Max}(0, \pm 1) & \min(\pm 1, 0) & (2) & \text{Max}(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad (1) \\
 \text{Max}(\pm 2, 1) & \min(\pm 2, 1) & (4) & \text{Max}(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3) \\
 & \text{Max}(9, 36) & (6) & \text{Max}(6, 2) \quad (5) \\
 \text{Max}(\pm 1, \mp 1) & \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (8) & (6, 2) \quad (7) \\
 & \min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) & (10) & 7 / \sqrt{45} \quad (9) \\
 & \text{Max}(2, 3) & (12) & \text{Max}(6, 2) \quad (11) \\
 & & & \min\{2K + L\} \quad ; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13)
 \end{array}$$

פרק 9 - אינטגרלים

חשב את האינטגרלים הבאים (אינטגרלים מידיים):

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (21) \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (20) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (19)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (24) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (23) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (26) \qquad \int (e^{x+1})^2 dx \quad (25)$$

חשב את האינטגרלים הבאים :

(27-37) : אינטגרציה בחלקים. 38-50 : שיטת ההצבה. 51-56 : חילוק פולינומים).

$$\int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (29) \quad \int x^4 \ln x dx \quad (28) \quad \int x e^x dx \quad (27)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (32) \quad \int \ln x dx \quad (31) \quad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (30)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (35) \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (34) \quad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (33)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (37) \quad \int \ln^2 x dx \quad (36)$$

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (40) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (39) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (38)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (43) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (42) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (41)$$

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (46) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (45) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (44)$$

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (49) \quad \int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (48) \quad \int \ln^3 x dx \quad (47)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (50)$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (52) \quad \int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (51)$$

פרק 10 - האינטגרל המסוים ושימושו

האינטגרל המסוים

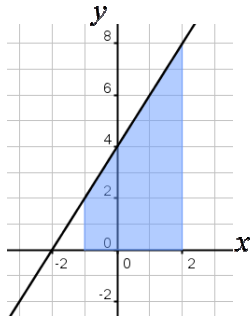
25 בסרטון זה מוסבר האינטגרל המסוים.

חשב את האינטגרל המסוים הבא: $\int_{-2}^1 (x^2 - 6x + 1) dx$.

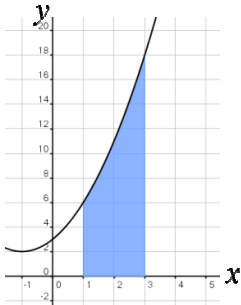
חישובי שטחים

26 בסרטון זה מוסבר כיצד להשתמש באינטגרל המסוים כדי לחשב שטחים.

נתונה הפונקציה: $y = 2x + 4$.
חשב את השטח המוגבל שמתחת הישר,
ציר ה- x והישרים $x = -1$ ו- $x = 2$.

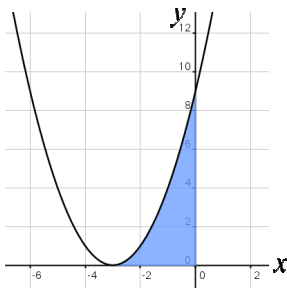


27 חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה: $f(x) = x^2 + 2x + 3$, ציר ה- x והישרים $x = 1$ ו- $x = 3$.



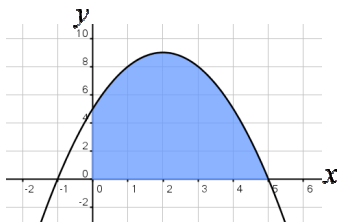
28 נתונה הפונקציה $y = (x + 3)^2$.

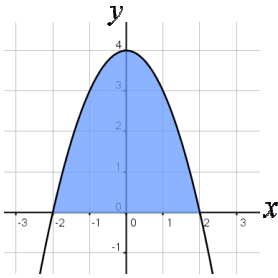
- a. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
b. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לצירים.



29 נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + 4x + 5$.

- a. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
b. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x וציר ה- y .



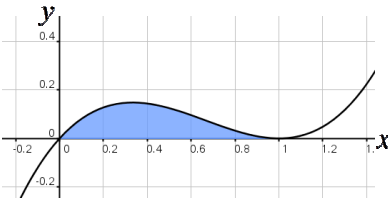


30 נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4$.

- a. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
b. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לציר ה- x .

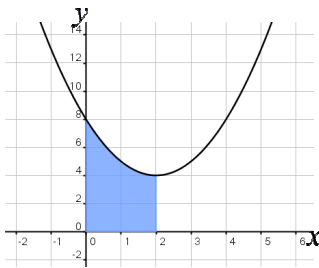
31 מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

וציר ה- x כמתואר באיור:



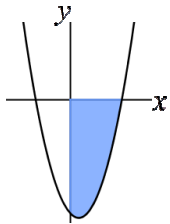
32 נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4x + 8$

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הצירים וקדקוד הפרבולה.



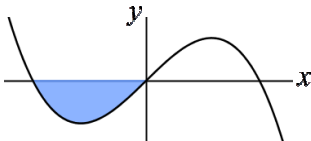
33 בסרטון זה מוסבר כיצד לחשב שטח שמתחת לציר ה- x .

נתונה הפונקציה $y = x^2 - x - 6$.
חשב את השטח המוגבל שמתחת לפונקציה ולצירים שברביע הרביעי.



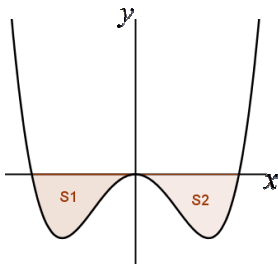
34 נתונה הפונקציה $f(x) = x(4 - x^2)$

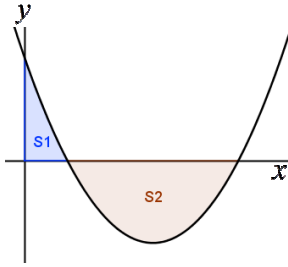
חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה- x שברביע השלישי.



35 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$

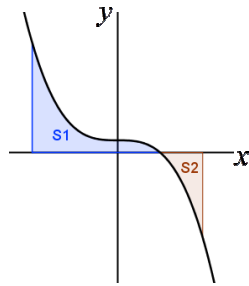
חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה- x .





36 חשב את האינטגרל המסוים של הפונקציה $y = x^2 - 6x + 5$ בין 0 ל-5.

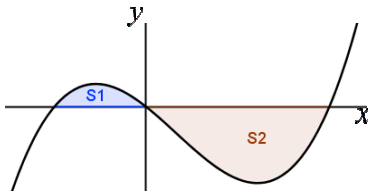
האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים: $S_1 + S_2$? אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.



37 א. חשב את ערך האינטגרל הבא: $\int_{-2}^2 (-x^3 + 1) dx$.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^3 + 1$.

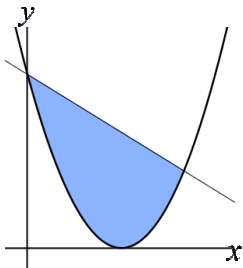
מעבירים ישרים: $x = 2$ ו- $x = -2$ כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 כמתואר באיור. חשב את סכום השטחים: $S_1 + S_2$ והסבר מדוע תוצאת החישוב שונה מסעיף א'.



38 נתונה הפונקציה: $y = x^3 - x^2 - 2x$.

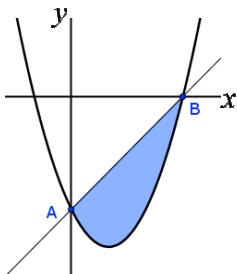
יוצרים את השטחים S_1 ו- S_2 בין גרף הפונקציה וציר ה- x כמתואר באיור.

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x .



39 בסרטון זה מוסבר כיצד לחשב שטח הכלוא בין שני גרפים.

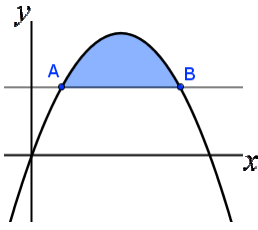
נתונות הפונקציות: $y = (x-3)^2$; $y = -x + 9$. חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



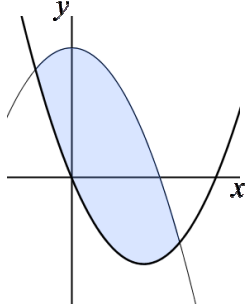
40 נתונה הפונקציה: $y = 3x^2 - 6x - 9$.

א. מצא נקודות חיתוך של הפונקציה עם הצירים (נסמן ב-A ו-B).

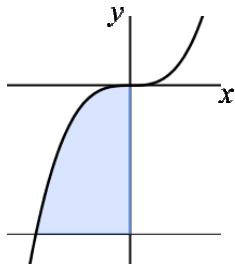
ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AB.



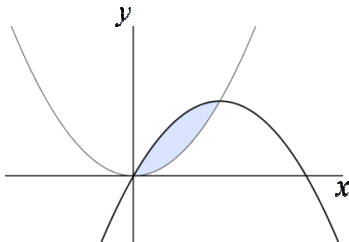
41 נתונה הפרבולה: $y = -x^2 + 6x$ והישר $y = 5$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפרבולה לישר.



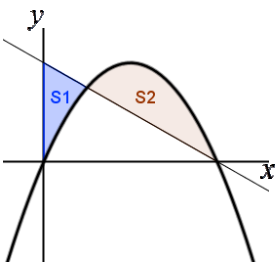
42 חשב את השטח המוגבל בין גרפים של הפונקציות:
 $y = x^2 - 4x$; $y = -x^2 + 6$.



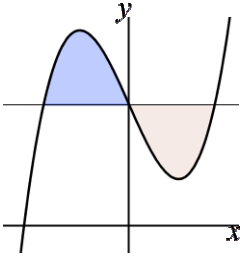
43 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
הישר $y = -8$ וציר ה- y כמתואר באיור.



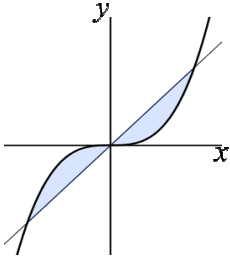
44 מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה: $y = x^2$
לבין גרף הפונקציה: $y = 2x - x^2$.



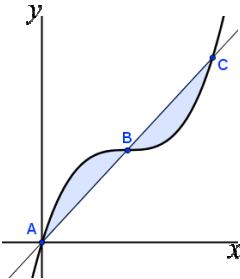
45 נתונות הפונקציות הבאות:
 $g(x) = -x + 4$; $f(x) = -x^2 + 4x$
מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y ב- S_1 ,
ואת המשך השטח הכלוא בין הגרפים ב- S_2 כמתואר באיור.
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
ב. חשב את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.



- 46 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x + 5$ והישר $y = 5$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.
 ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.

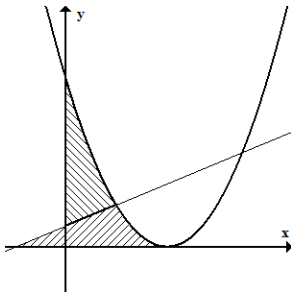


- 47 נתונות הפונקציות: $y = x^3$; $y = x$.
 חשב את השטח המוגבל ביניהן.



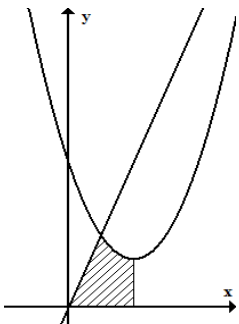
- 48 נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
 הישר AC חותך את גרף הפונקציה
 בנקודות הבאות: $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$
 חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

- 49 בסרטון זה מוסבר כיצד יש לחשב שטח המוגבל בין שתי פונקציות וציר ה- x .

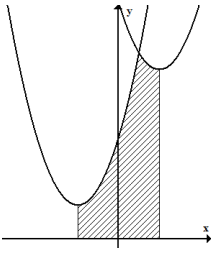


נתונות שתי הפונקציות: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = (x-2)^2$

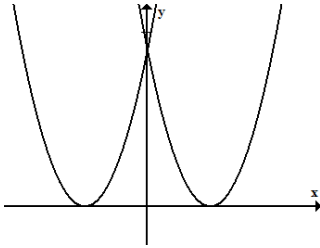
- א. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- x .
 ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- y .



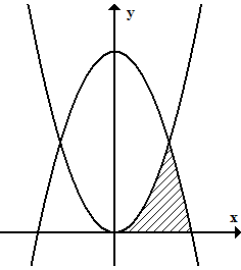
- 50 הפונקציות המתוארות בשרטוט הן: $y = x^2 - 4x + 6$; $y = 3x$.
 a. מצא את קדקוד הפרבולה.
 b. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר.
 c. חשב את השטח המסומן שבשרטוט.



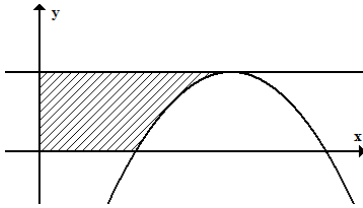
- 51 נתונות הפונקציות: $y = x^2 - 4x + 14$, $y = x^2 + 4x + 6$.
- מצא את שיעורי ה- x של קדקודי הפרבולות.
 - חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.
 - חשב את השטח המסומן בשרטוט.



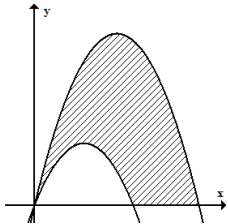
- 52 נתונות הפונקציות: $f(x) = (x-3)^2$, $g(x) = (x+3)^2$.
- חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- x .



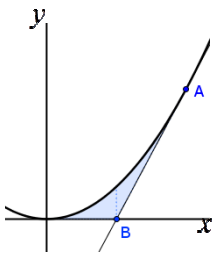
- 53 נתונות הפונקציות: $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.
- חשב את השטח המוגבל על ידי שתי הפונקציות וציר ה- x ברביע הראשון.



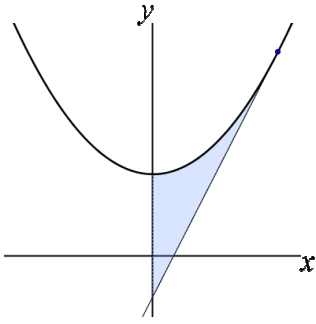
- 54 נתונה הפרבולה: $y = -x^2 + 4x - 3$.
- מעבירים ישר המקביל לציר ה- x מקדקוד הפרבולה.
- מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.
 - מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר והצירים.



- 55 נתונות הפרבולות הבאות:
- $f(x) = -x^2 + 5x$, $g(x) = -x^2 + 3x$
- חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה- x .

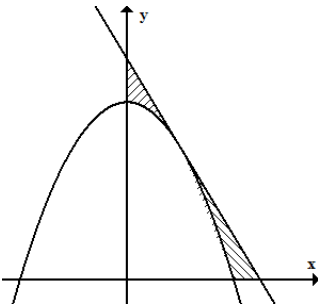


- 56 נתונה הפונקציה: $y = 2x^2$.
- מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה: $A(1,2)$.
- המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B .
- חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .



57 נתונה הפונקציה: $y = 3x^2 + 2$.

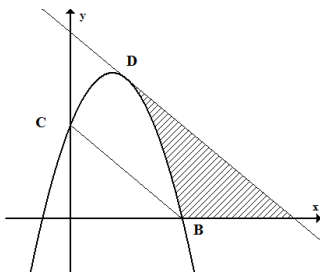
מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 5)$.
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר y .



58 נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4$

בנקודה $(1, 3)$ העבירו משיק.

- מצא את משוואת המשיק.
- מצא את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- y .
- חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .

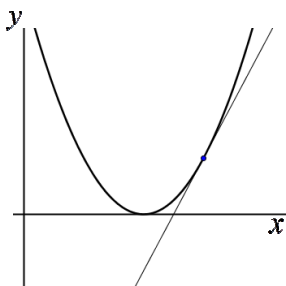


59 משוואת הפרבולה היא: $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$.

הנקודות $B(2, 0)$, $C(0, 2)$ הן נקודות חיתוך של הפרבולה עם הצירים.

המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC.

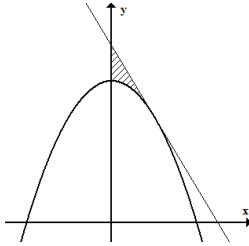
- מצא את משוואת המשיק.
- מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- x .
- מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- y .



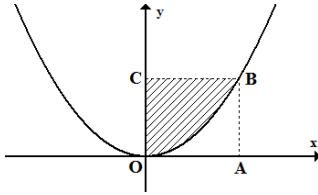
60 נתונה הפונקציה: $y = (x-4)^2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך הנקודה שבה: $x = 6$.

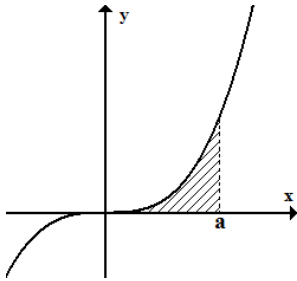
- מצא את משוואת המשיק.
- חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- x .

חישובי שטחים עם פרמטר

- 61 נתונה הפרבולה: $y = ax^2 + 8$.
 שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה $x = 2$ הוא -2 .
 א. חשב את a .
 ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, הפרבולה וציר y .



- 62 הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y = ax^2$, (a פרמטר).
 המרובע ABCD הוא ריבוע.
 הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.
 ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.
 מצא את ערך הפרמטר a ואת השטח המסומן בשרטוט.



- 63 נתונה הפונקציה $y = x^3$.
 מעבירים אנך לציר ה- x : $x = a$ (a פרמטר חיובי) כך שנוצר שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה- x .
 א. הבע באמצעות a את השטח המקווקו בציר.
 ב. חשב את a אם ידוע כי שטח זה שווה ל- a^2 .

פרק 11 - גזירת האינטגרל

(1) צטט את המשפט היסודי (השני) של החדו"א.

(2) על סמך המשפט היסודי הוכח כי אם $f(x)$ רציפה ו- $a(x), b(x)$ גזרות, אזי:

$$1) I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x)$$

$$2) I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (1) \quad I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (2) \quad I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (3) \quad I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (4)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (1)$$

$$(5) \text{ חקור את הפונקציה } F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt \text{ לפי הפירוט הבא:}$$

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.